

3. feladat

Cézár az egyetlen kutya a mi utcánkban.

A házak 1-től vannak folyamatosan számozva. Cézár házszáma C , amelyről azt tudjuk, hogy legalább 30, de kisebb mint 40. Ismeretes az is, hogy a C előtti számok összege megegyezik a C utáni számok összegével.

a. Hol lakik Cézár?

b. Hány ház van az utcánkban?

Megoldás

Legyen a házak száma: S

Cézár házszáma: C

Ekkor:

$$1 + 2 + 3 + \dots + C - 1 = C + 1 + C + 2 + \dots + S$$
$$\frac{1 + C - 1}{2} * (C - 1) = \frac{1}{2} * S * (S + 1) - \frac{1}{2} * C * (C + 1)$$

$$C^2 - C = S^2 + S - C^2 - C, \text{ ebből}$$

$$S^2 + S - 2C^2 = 0 \text{ ezt átalakítva, vagy megoldva}$$

$$\left(S + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2C^2 = 0$$

$$\left(S + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + 2C^2, \text{ mivel } s + \frac{1}{2} > 0$$

$$S + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2C^2} = \sqrt{\frac{1 + 8C^2}{4}} = \frac{\sqrt{1 + 8C^2}}{2}$$

$$S = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8C^2}}{2} \in \mathbb{N}$$

Ez csak akkor teljesülhet, ha $1 + 8C^2$ egy páratlan négyzetszám. Mivel $30 \leq C < 40$, így csak $C=35$ lehet.

$$\text{Ekkor } S = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8 \cdot 35^2}}{2} = 49$$

Azaz Cézár a 35-ös számú házban lakik, és az utcában 49 ház van.

Megjegyzés

1-től n -ig a számok $1+2+\dots+n$ összege Gauss módszerével $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Ezt alkalmaztuk az 1-től $C-1$ -ig, az 1-től C -ig, illetve 1-től S -ig terjedő számok összegére.

C keresését egyéb megoldásokkal lehet rövidíteni, de a feltételeknek megfelelő C -k kipróbálása sem okozhat gondot.